الحل العام للمعادلة المثلثية

اولا: المعادلة التى على الصورة جا α = جا β

الحل العام يكون $\alpha = \text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\beta$

البرهان

اما جا α = جا β $\Leftarrow$ $\alpha = ٢\text{ن}\pi + \beta$

$\Leftarrow$ α = عدد زوجى $\times \pi + \beta$

او جا α = جا $(\pi - \beta)$ $\Leftarrow$ $\alpha = ٢\text{ن}\pi + \pi - \beta$

$\Leftarrow$ $\alpha = \pi(1+٢\text{ن}) - \beta$

$\Leftarrow$ α = عدد فردى $\times \pi - \beta$

$\therefore$ الحل العام يكون $\alpha = \text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\beta$

مثال تطبيقى

أوجد الحل العام للمعادلة: جا ٢θ = جتا θ

الحل

جا ٢θ = جا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

$٢\theta = \text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

اذا كانت ن زوجى فان $٢\theta = \text{ن}\pi + (\frac{\pi}{٢} - \theta)$

$٣\theta = \text{ن}\pi + \frac{\pi}{٢}$ $\Leftarrow$ $\theta = \frac{\text{ن}\pi}{٣} + \frac{\pi}{٦}$

اذا كانت ن فردى فان $٢\theta = \text{ن}\pi - (\frac{\pi}{٢} - \theta)$

$٢\theta = \text{ن}\pi - \frac{\pi}{٢} + \theta$ $\Leftarrow$ $\theta = \text{ن}\pi - \frac{\pi}{٢}$

ثانيا:المعادلة التى على الصورة جتا α = جتاβ

الحل العام يكون $\alpha = ٢ن\pi \pm \beta$

البرهان

اما جتا α = جتاβ ⇐ $\alpha = ٢ن\pi + \beta$

⇐ $\alpha = \text{عدد زوجى} \times \pi + \beta$

او جتا α = جتا$(٢\pi - \beta)$ ⇐ $\alpha = ٢ن\pi + ٢\pi - \beta$

⇐ $\alpha = \pi(٢ن+٢) - \beta$

⇐ $\alpha = \text{عدد زوجى} \times \pi - \beta$

∴ الحل العام يكون $\alpha = ٢ن\pi \pm \beta$

مثال تطبيقى

أوجد الحل العام للمعادلة: جا٢θ = جتا θ

الحل

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$ = جتا θ

$\theta = ٢ن\pi \pm \left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$

اما $\theta = ٢ن\pi + \left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$

$٣\theta = ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$ ⇐ $\theta = \frac{٢ن\pi}{٣} + \frac{\pi}{٦}$

او $\theta = ٢ن\pi - \left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$

$\theta = ٢ن\pi - \frac{\pi}{٢} + ٢\theta$

$-\theta = ٢ن\pi - \frac{\pi}{٢}$ ⇐ $\theta = -٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$

ثالثا: المعادلة التى على الصورة ظا α = ظا β

الحل العام يكون $\alpha = \pi$ن $+ \beta$

البرهان

اما ظا α = ظا β $\Leftarrow$ $\alpha = \pi$٢ن $+ \beta$

$\Leftarrow$ $\alpha = \pi \times$ عدد زوجى $+ \beta$

او ظا α = ظا $(\beta + \pi)$ $\Leftarrow$ $\alpha = \pi$٢ن $+ \pi + \beta$

$\Leftarrow$ $\alpha = \pi(1+$٢ن$) + \beta$

$\Leftarrow$ $\alpha =$ عددفردى $+ \beta$

$\therefore$ الحل العام يكون $\alpha = \pi$ن $+ \beta$

مثال تطبيقى

أوجد الحل العام للمعادلة: ظا ٢θ = ظتا θ

الحل

ظا ٢θ = ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

٢$\theta = \pi$ن $+ \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

٣$\theta = \pi$ن $+ \frac{\pi}{٢}$

θ : $\frac{\pi\text{ن}}{٣} + \frac{\pi}{٦}$